วิทยาศาสตร์งานไฟฟ้า อิเล็กทรอนิกส์ และการสื่อสาร

รหัสวิชา 30000 - 1303

ครูจักรกฤช หล้าชาญ

หน่วยที่ 1

ปริมาณเวกเตอร์

หัวข้อเรื่อง (Topics)

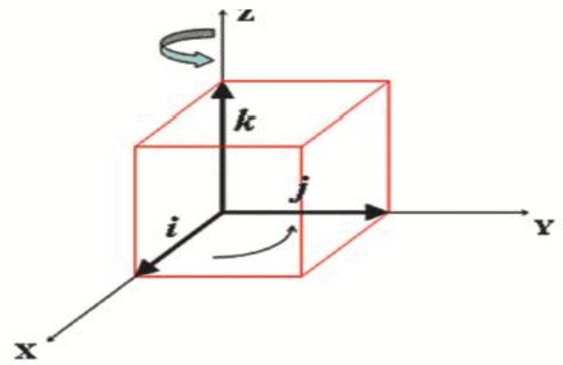
1.1 องค์ประกอบของเวกเตอร์

1.2 การบวกเวกเตอร์

1.3 การคูณเวกเตอร์

1.1 องค์ประกอบของเวกเตอร์

เนื่องจากปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง วิธีการที่จะทำให้หาทิศทางของปริมาณเวกเตอร์ได้ง่ายขึ้น นั่นคือ ต้องกำหนดทิศทางของปริมาณเวกเตอร์เป็น 3 มิติ เป็นระบบแกน x, y และ z



ให้ $\hat{i}$ แทน เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทางแกน x

$\hat{j}$ แทน เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทางแกน y

$\hat{k}$ แทน เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทางแกน z

หรืออาจจะใช้

A_x แทน เวกเตอร์ A ในแนวแกน x

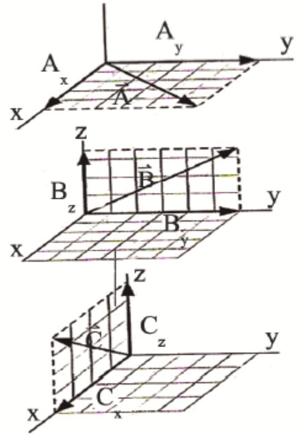
A_y แทน เวกเตอร์ A ในแนวแกน y

A_z แทน เวกเตอร์ A ในแนวแกน z

ในกรณีที่เวกเตอร์ไม่ได้อยู่ในแกนใดแกนหนึ่งจะมีองค์ประกอบของเวกเตอร์มากกว่า 1 แกน ซึ่งจะแบ่งออกเป็นดังนี้

1.1.1 องค์ประกอบของเวกเตอร์ 2 มิติ

เวกเตอร์ 2 มิติ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนระนาบใดระนาบหนึ่ง ได้แก่ ระนาบ x-y, ระนาบ x-z และระนาบ y-z ซึ่งขนาดของเวกเตอร์เหล่านี้จะเป็นผลบวกของเวกเตอร์ 2 แกน



ระนาบ x – y

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

ระนาบ y – z

$$\vec{B} = \vec{B}_y + \vec{B}_z$$

ระนาบ x – z

$$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_z$$

องค์ประกอบเวกเตอร์แต่ละระนาบ

การหาขนาดของเวกเตอร์ในระนาบใดระนาบหนึ่งจะมีวิธีการหาค่าได้ 2 แบบ คือ

1. **การหาจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (Unit Vector) ($\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$)

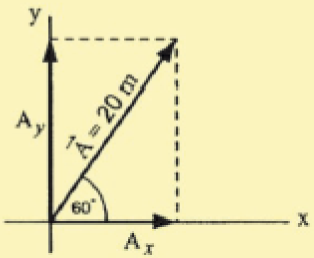
ในการบอกลักษณะของเวกเตอร์แบบนี้จะเขียนเวกเตอร์โดยบอกขนาดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ($\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$) ซึ่งทำให้ทราบขนาดของเวกเตอร์ในแนวแกน x, y และ z ได้

2. **การหาจากขนาดของเวกเตอร์และมุมของเวกเตอร์** (θ)

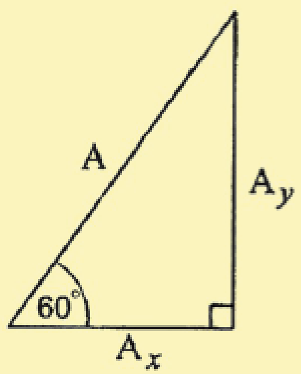
ในกรณีที่ทราบขนาดของเวกเตอร์และมุมของเวกเตอร์แล้ว สามารถหาค่าของขนาดของเวกเตอร์ในแนวแกน x, y และ z โดยใช้หลักตรีโกณมิติโดยศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2 เวกเตอร์ A มีขนาด 20 เมตร ทำมุม 60° กับแนวราบจงหา ขนาดของเวกเตอร์ A ในแนวแกน x และ y

วิธีทำ



พิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\cos 60^\circ = \dfrac{A_x}{A}$



$$\frac{1}{2} = \frac{A_x}{20}$$

$$\therefore A_x = 10$$

$$\sin 60^\circ = \frac{A_y}{A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A_x}{20}$$

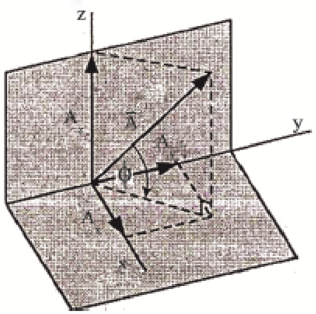
$\therefore A_y = 10\sqrt{3}$ เมตร

ขนาดของเวกเตอร์แนวแกน x = 10 เมตร **ตอบ**

ขนาดของเวกเตอร์แนวแกน y = 17.32 เมตร **ตอบ**

1.1.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์ 3 มิติ

เวกเตอร์ที่ไม่ได้อยู่บนระนาบใดระนาบหนึ่งหรือแกนในแกนหนึ่งจะเป็นเวกเตอร์ที่ มีองค์ประกอบทั้ง 3 แกน หรือ 3 มิติ โดยจะมีขนาดของเวกเตอร์แกน x แกน y และแกน z พร้อมกัน ดังนั้นลักษณะของเวกเตอร์จะเขียนอยู่ในรูปของ



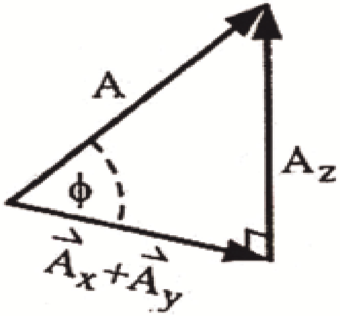
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

A_x ขนาดของเวกเตอร์ A ในแนวแกน x

A_y ขนาดของเวกเตอร์ A ในแนวแกน y

A_z ขนาดของเวกเตอร์ A ในแนวแกน zϕ

องค์ประกอบเวกเตอร์ 3 มิติ ในการหาขนาดของเวกเตอร์และทิศทางของเวกเตอร์

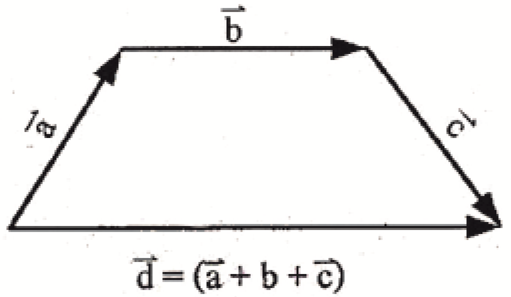


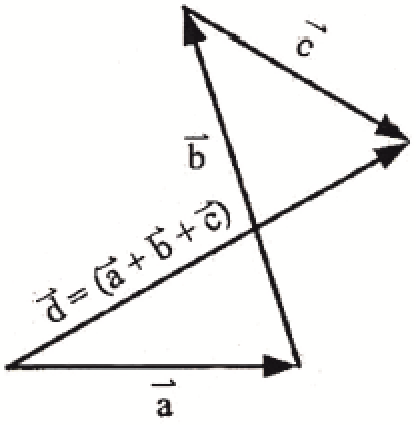
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\tan \varnothing = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

1.2 การบวกเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ คือ การนำเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์มาเรียงต่อกัน โดยไม่ให้คุณสมบัติของเวกเตอร์ที่นำมาต่อเปลี่ยนไป ผลลัพธ์จะเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่ลากจากจุดเริ่มต้น (หาง) ของเวกเตอร์แรกไปยังจุดสิ้นสุด (หัว) ของเวกเตอร์สุดท้าย





การบวกเวกเตอร์โดยการวาดรูป

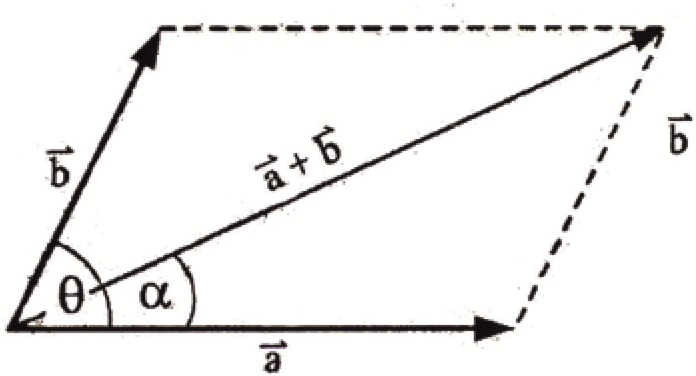
1.2.1 การหาเวกเตอร์ผลลัพธ์ด้วยการวาดรูป

การบวกเวกเตอร์โดยการวาดรูปเวกเตอร์บวกกัน โดยนำหางเวกเตอร์ที่ 2 ไปต่อกับหัวเวกเตอร์แรก ถ้ามีหลายเวกเตอร์ก็นำมาต่อเรียงกันไป เวกเตอร์ผลลัพธ์จะเป็นเวกเตอร์ที่ลากจากหาเวกเตอร์แรกไปยังหัวเวกเตอร์สุดท้าย จากนั้นก็วัดขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์เป็นคำตอบ

1.2.2 การบวกเวกเตอร์ด้วยวิธีการคำนวณ

1. การบวกเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

ในการบวกเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะหาได้จากการคำนวณโดยใช้สูตร



- หาขนาด

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

- หาทิศทาง

$$\tan\propto = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}$$

2. ใช้การแยกเวกเตอร์ไปตามแนวแกน x และ y

ในกรณีนี้จะใช้เมื่อนำเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์มาบวกกันซึ่งจะต้องแยกเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์ไปตามแนวแกน x และ y จากนั้น หาผลบวกของเวกเตอร์ในแต่ละแกน

$$\text{ผลบวกแกน } x = a_x + b_x + c_x \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{ผลบวกแกน } y = a_y + b_y + c_y \ldots\ldots\ldots$$

จากนั้นหาผลบวกเวกเตอร์ผลลัพธ์จากสูตร

$$\text{เวกเตอร์ผลลัพธ์} = \sqrt{(\text{ผลบวกแกน } x)^2 + (\text{ผลบวกแกน } y)^2}$$

3. ใช้การบวกจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแต่ละเวกเตอร์

ถ้าการระบุเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์อยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (a_x + b_x + c_x)\hat{i} + (a_y + b_y + c_y)\hat{j} + (a_z + b_z + c_z)\hat{k}$$

$$\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = \sqrt{(a_x + b_x + c_x)^2 + (a_y + b_y + c_y)^2 + (a_z + b_z + c_z)^2}$$

1.3 การคูณเวกเตอร์

ในการนำเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์มาคูณกัน สามารถหาผลลัพธ์โดยวิธีการคูณได้ 2 แบบ คือ

1.3.1 Dot – Product เป็นวิธีการคูณเวกเตอร์ที่ให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งเป็นวิธีการที่จะทำให้ปริมาณเวกเตอร์กลายเป็นปริมาณสเกลาร์ได้ โดยนิยามของการคูณมีดังนี้

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

เมื่อ a และ b เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

และ θ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

หมายเหตุ จากนิยามของ Dot Product จะสามารถทำให้เวกเตอร์กลายเป็นสเกลาร์ โดยการเอาขนาดเวกเตอร์

ยกกำลังสอง

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot a\cos\theta$$

$$= a^{2}\cos 0^{\circ}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a^{2}$$

1.3.2 Cross – Product

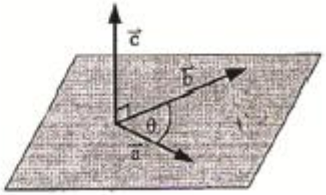
ในการคูณเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณเวกเตอร์เหมือนเดิม แต่ทิศทางของเวกเตอร์ จะตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์ทั้งสอง โดยนิยามของการคูณแบบนี้มีดังนี้

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$$

▶ ขนาดของ $\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})$

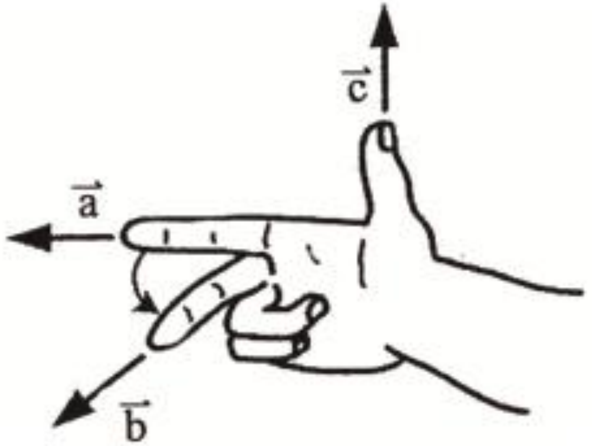
$$\boxed{\left|\vec{c}\right| = a\,b\sin\theta}$$

▶ ทิศทางของ $\vec{c}$



ในการหาทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์ จะใช้การกำมือขวา โดยหัวแม่มือแสดงทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์ การกำมือจะกำจากเวกเตอร์แรกไปหาเวกเตอร์ที่ 2 ดังนั้นการคูณแบบ Cross Product จึงไม่สามารถจะสลับที่สำหรับการคูณได้

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



แต่ขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์เท่ากัน ทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์จะตรงกันข้ามในกรณีที่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\left.\begin{aligned} \hat{i}\times\hat{i} &= 0 \\ \hat{j}\times\hat{j} &= 0 \\ \hat{i}\times\hat{i} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{เพราะ } \sin 0^\circ = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{i}\times\hat{j} &= 1(\hat{k}) \\ \hat{i}\times\hat{k} &= 1(\hat{i}) \\ \hat{j}\times\hat{k} &= 0(\hat{j}) \end{aligned}\right\} \text{เพราะ } \sin 90^\circ = 1$$

(ถ้าสลับที่การคูณจะได้เครื่องหมายลบ)

ดังนั้นถ้า $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

เมื่อนำมาคูณกันทุกพจน์

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})$$

จะได้

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i}+(a_z b_x - a_x b_z)\hat{j}+(a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

หรืออาจจะใช้วิธีเขียนในรูป Determinant

$$\begin{array}{ccccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{array}$$

ค่าของ Unit ทางแกน $\hat{i}$ คือ $a_y b_z - a_z b_y$

ค่าของ Unit ทางแกน $\hat{j}$ คือ $a_z b_x - a_x b_z$

ค่าของ Unit ทางแกน $\hat{k}$ คือ $a_x b_y - a_y b_x$

คูณลงเป็นบวก

คูณขึ้นเป็นลบ